

**Verteilungs-Invarianzprinzipien für Folgen,
die dem starken Gesetz der großen Zahl genügen**

von
Dietrich Werner Müller
aus Dresden

1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546303_0019

**Verteilungs-Invarianzprinzipien für Folgen,
die dem starken Gesetz der großen Zahl genügen**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Dietrich Werner Müller
aus Dresden

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1968

Dekan: Prof. Dr. W. Haupt

Erstberichterstatter: Prof. Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. H. Bauer

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	2
§1. Das allgemeine Invarianzprinzip	5
§2. Anwendungen	10
§3. Ein Verteilungs - Invarianzprinzip für das Gesetz vom iterierten Logarithmus	17
§4. Geschwindigkeit der Konvergenz	22
Literaturverzeichnis	36

Einleitung

Sei ξ_n die Summe der ersten n Glieder einer Folge $X = \{X_i : i = 1, 2, \dots\}$ von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $EX_1 = 0$ und $EX_1^2 = 1$. Das Verhalten der linear interpolierten Partialsummen

$$\xi(t) = (1 - (t - [t])) \xi_{[t]} + (t - [t]) \xi_{[t]+1}$$

($t \geq 0$ reell, $[t] = \max \{n : n = 0, 1, 2, \dots; n \leq t\}$) wird durch das Invarianzprinzip von DONSKER - PROKHOROV ([2], [7], siehe auch [5], [6]) beschrieben, welches aussagt, dass die Folge der Verteilungen der Zufallsfunktionen

$$t \rightarrow n^{-1/2} \xi(nt) \quad (0 \leq t \leq 1; n = 1, 2, \dots)$$

für $n \rightarrow \infty$ im Raum $C[0, 1]$ aller reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall (versehen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz) schwach gegen das WIENER - Mass konvergiert. Mithilfe dieses Satzes erhält man unmittelbar die Grenzverteilungen gewisser Funktionale auf X , welche jeweils nur von endlich vielen der X_i abhängen, wie zum Beispiel die Arcsin - Verteilung für

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \chi[\xi_k > 0]$$

($n \rightarrow \infty$; χ_M bezeichnet die charakteristische Funktion einer Menge M). Im Falle von Funktionalen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, ist die Anwendung dieses Invarianzprinzips im allgemeinen nicht ohne von Fall zu Fall verschiedene Zusatz-

überlegungen möglich. Die wichtigsten Beispiele solcher Funktionale sind die sogenannten "letzten Eintrittszeiten", denen wir daher in dieser Arbeit besondere Beachtung schenken; sie hängen ja von den Werten unendlich vieler oder gar aller X_i ab. Entsprechendes gilt auch für das Funktional

$$X \longrightarrow n^{1/2} \max_{k \geq n} \frac{|\xi(k)|}{k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und ähnliche.

Eine einheitliche Methode zur Berechnung der Grenzverteilungen solcher Funktionale wird durch das folgende Invarianzprinzip (Satz 1 dieser Arbeit) bereitgestellt, welches das wahrscheinlichkeitstheoretische Verhalten der ganzen Pfade beschreibt:

die Folge der Verteilungen der Zufallsfunktionen

$$t \longrightarrow n^{-1/2} \xi(nt) \quad (0 \leq t < \infty; n = 1, 2, \dots)$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ im (separablen) Banachraum $C_1[0, \infty)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen x auf $[0, \infty)$ mit

$$x(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t} = 0 \quad \text{und} \quad \|x\|_1 := \sup_{t \geq 0} \frac{|x(t)|}{t \vee 1} < \infty$$

(versehen mit der durch die Norm $\| \cdot \|_1$ gegebenen Topologie) schwach gegen das (auf diesem Raum definierte) WIENER - Mass.

Als eine für die Statistik interessante Folgerung ergibt sich zum Beispiel

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\max \left\{ k : \left| \frac{1}{k} \xi(k) \right| \geq \frac{\theta}{\sqrt{n}} \right\} < \alpha n \right] = \theta \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)^2 \theta^2 u}{2}} du$$

(gleichmässig in $\alpha, \theta > 0$). Solche Aussagen verdeutlichen, wie man mit Verteilungs - Invarianzprinzipien das starke Gesetz der grossen Zahl verschärfen kann.

Wir beweisen in §1 gleich eine allgemeinere Version dieses Satzes, gültig unter Voraussetzung der Lindebergbedingung und des starken Gesetzes der grossen Zahl. Der Beweis benützt - über die für den PROKHOROVschen Satz notwendige Beweistechnik hinaus - im wesentlichen allein die Kolmogorovsche Ungleichung; schon diese Tatsache lässt vermuten, dass Satz 1 für manche Zwecke nicht scharf genug sein wird. In §3 wird daher die schärfere Norm

$$x \rightarrow \|x\|_2 = \sup_{t \geq 0} \frac{|x(t)|}{\sqrt{2(t \vee 3) \log \log (t \vee 3)}}$$

in dem entsprechend definierten Raum $C_2[0, \infty)$ eingeführt und ein Invarianzprinzip bewiesen, das über die Verteilungen der Zufallsfunktionen

$$t \rightarrow \frac{n^{-1/2} \xi(nt)}{\sqrt{2t \log \log t}} \quad (t \geq 3 ; n = 1, 2, \dots)$$

Aussagen macht, etwa über die Grenzverteilung des letzten Zeitpunktes, für welchen eine solche Funktion $\geq C$ (> 1) ist.

Aussagen dieser Art wären mit dem gewöhnlichen Invarianzprinzip nicht zu erhalten.

Ein besonderer Vorteil unserer allgemeinen Betrachtungsweise liegt in der Möglichkeit, eine von der Zufallsvariablen X_1 weitgehend unabhängige Abschätzung für die Geschwindigkeit der Konvergenz gegen das WIENER - Mass herzuleiten - durch Verallgemeinerung der SKOROKHODschen Abschätzung für das gewöhnliche Invarianzprinzip ([8], [9], [10]). Den Beweis dieser Abschätzung

führen wir so, dass sich zugleich die folgende Aussage ergibt:

die Verteilungsfunktionen auf der linken Seite von (1) weichen von ihrer Grenzverteilungsfunktion punktweise um weniger als

$$L \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

ab, wobei L nur von (dem als endlich vorausgesetzten) $\sup |X_1|$ und θ abhängt, nicht dagegen von n und α , soweit dieses durch ein $\alpha_0 > 0$ nach unten beschränkt ist.

Herrn Prof. K. JACOBS, den Herren Priv.-Doz. Dr. U. KRENGEL und Prof. V. STRASSEN möchte ich für ihr Interesse an der entstehenden Arbeit und für viele Anregungen danken. Desgleichen danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre finanzielle Unterstützung.

§1. Das allgemeine Invarianzprinzip

$X = \{X_i : i = 1, 2, \dots\}$ sei eine Folge von unabhängigen reellen Zufallsvariablen mit $EX_i = 0$ und $0 < EX_i^2 < \infty$ ($i = 1, 2, \dots$), welche die Lindebergbedingung und das starke Gesetz der grossen Zahl in der Form

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i \leq n} X_i = 0\right] = 1 \quad \left(s_n^2 = \sum_{i \leq n} EX_i^2\right)$$

erfüllt. Sei $t \rightarrow \xi(t)$ ($t \geq 0$ reell) ein stochastischer Prozess mit

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(s_n^2) = \sum_{k \leq n} X_k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

der in jedem der Teilintervalle $[s_n^2, s_{n+1}^2]$ monoton und stetig ist. Diesen Prozess betrachten wir in dem schon in der Einleitung definierten Banachraum $C_1[0, \infty)$, der im übrigen vermöge der Abbildung, welche die Funktion $t \rightarrow x(t)$ in die Funktion $t \rightarrow \frac{x(t)}{t \vee 1}$ überführt, zu dem Raum aller in 0 und ∞ verschwindenden stetigen Funktionen auf der kompaktifizierten positiv-reellen Achse $[0, \infty]$ (versehen mit der gleichmässigen Norm) isometrisch ist; $C_1[0, \infty)$ ist also insbesondere separabel.

Satz 1. Für jedes $n = 1, 2, \dots$ ist die Verteilung des durch

$$t \rightarrow \eta_n(t) := \frac{1}{s_n} \xi(s_n^2 t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

definierten stochastischen Prozesses η_n auf $C_1[0, \infty)$ konzentriert;
die Folge der Verteilungen dieser Prozesse konvergiert schwach
gegen die Verteilung eines zur Zeit $t = 0$ in 0 startenden Wiener-
prozesses.

Als schwache Topologie ist dabei $\sigma\{C(C_1[0, \infty))', C(C_1[0, \infty))\}$ zu nehmen, wobei allgemein CE den Raum aller stetigen beschränkten reellwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum E mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz bezeichnet.

Anmerkung: Den Beweis dieses Satzes führen wir mit den in [6] vom Verfasser dargestellten modelltheoretischen Methoden; dies geschieht nur der Einfachheit halber und besagt keineswegs, dass nicht auch die komplizierteren klassischen Methoden wie die von PROKHOROV in [7] entwickelten zum Ziele führten. Die spezifisch modelltheoretische Terminologie übernehmen wir aus [6] ohne weitere Erläuterung.

Beweis von Satz 1 :

1. Die Gültigkeit des starken Gesetzes der grossen Zahl bedeutet

$$P \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(t) = 0 \right] = 1$$

und somit auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \eta_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{ts_n} \xi(s_n^2 t) = s_n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{t} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Damit ist η_n mit Wahrscheinlichkeit 1 Element von $C_1[0, \infty)$ ($n = 1, 2, \dots$).

2. Sei P_n die Verteilung von η_n in $C_1[0, \infty)$ (die zugehörige σ -Algebra ist die der Borelmengen). Genau wie in [6] (Lemma 3) zeigt man nun, dass für die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmassen P_n gegen das WIENER - Mass auf einem Raum C_0 stetiger reellwertiger Funktionen auf $[0, \infty)$, für dessen Topologie alle Auswertungsabbildungen $C_0 \ni x \rightarrow x(t)$ ($0 \leq t < \infty$) stetig sind, die folgenden beiden Bedingungen hinreichen (die zweite bezieht sich auf ein beliebiges - für den Beweis festes - Enlargement der vorliegenden mathematischen Struktur):

(i) die endlichdimensionalen Randverteilungen der P_n konvergieren schwach gegen diejenigen des WIENER - Masses;

(ii) das "innere Mass" der Menge der Near-standard - Punkte von ${}^*C_0 \setminus P_n({}^*C_0)$ ist gleich 1 für alle "unendlich grossen natürlichen Zahlen" n .

Da die erste Bedingung in unserem Fall leicht aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, wenden wir uns sofort der Nachprüfung der zweiten zu. Seien gegeben $\epsilon > 0$ standard, n eine unendlich grosse natürliche Zahl. Wir wollen zeigen, dass $P_n({}^*C_1[0, \infty)) \geq 1 - \epsilon$.

Dazu wählen wir zu einer beliebigen endlichen natürlichen Zahl m ein reelles t_m standard und so gross, dass

$$(2) \quad P \left[\sup_{t \geq t_m} \left| \frac{\eta_n(t)}{t} \right| > \frac{1}{m} \right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m}$$

wird; die Möglichkeit einer solchen Wahl wird weiter unten gezeigt.

Dann bestimmen wir $\delta_m > 0$ standard so, dass

$$(3) \quad P \left[\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta_m \\ t, s \in [0, t_m]}} |\eta_n(t) - \eta_n(s)| > \frac{1}{m} \right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m}$$

wird; die Existenz eines solchen δ_m folgt aus der Gültigkeit des gewöhnlichen Invarianzprinzips auf dem kompakten Intervall $[0, t_m]$ und aus der Tatsache, dass die Stetigkeitsmoduln stetige(Standard-) Funktionale auf $C[0, t_m]$ sind.

(2) und (3) liefern für das Ereignis

$$S = \bigcap_{m=1}^{m_0} \left[\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta_m \\ t, s \in [0, t_m]}} |\eta_n(t) - \eta_n(s)| \leq \frac{1}{m} \right] \cap \left[\sup_{t \geq t_m} \left| \frac{\eta_n(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{m} \right],$$

wobei m_0 eine unendlich grosse natürliche Zahl ist, für welche - mit m_0 statt m - (2) und (3) noch richtig sind, die Wahrscheinlichkeit $PS \geq 1 - \varepsilon$.

Nun ist $\eta_n S \subset ns^*C_1[0, \infty)$. Denn zu $x \in \eta_n S$ ist die durch $x_0(t) = {}^0x(t)$ (t standard) auf $[0, \infty)$ definierte Funktion x_0 der Standard-Part von x ; für diese Standard-Funktion gilt nämlich

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq \delta_k \\ t, s \in [0, t_k]}} |x_0(t) - x_0(s)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sup_{t \geq t_k} \left| \frac{x_0(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{k}$$

für alle (endlichen) natürlichen Zahlen k ; d.h. $x_0 \in C_1[0, \infty)$;

ausserdem ist nach Definition von x_0

$$\|x - x_0\|_1 = \sup_{t \geq 0} \frac{|x(t) - x_0(t)|}{t \vee 1} \leq \sup_{t \leq t_k} |x(t) - x_0(t)| + \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k},$$

also infinitesimal, woraus $x \in ns^*C_1[0, \infty)$ folgt.

Es ist also nur noch die Existenz einer Standard-Zahl t_m nachzuweisen, für die (2) richtig ist. Für den Beweis setzen wir $\varepsilon' = 1/m$. Wegen $s_n^2 \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ (das folgt aus der Gültigkeit des starken Gesetzes der grossen Zahl) und aufgrund der Lindebergbedingung genügt es, den folgenden Ausdruck mit zunächst noch unbestimmtem $n_0 \geq n$ abzuschätzen:

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \geq s_{n_0}^2 / s_n^2} \left| \frac{\eta_n(t)}{t} \right| > \varepsilon' \right].$$

Unter der Voraussetzung dieses Ereignisses ist

$$|\xi(s_k^2)| > \frac{\varepsilon'}{2} \frac{s_k^2}{s_n} \quad \text{für mindestens ein } k \geq n_0;$$

denn andernfalls existierte für ein $k \geq n_0$ ein t derart, dass

$$T_1 := \frac{s_k^2}{s_n^2} < t < T_2 := \frac{s_{k+1}^2}{s_n^2}$$

(also nach der Lindebergbedingung $T_1/T_2 \cong 1$) und

$$(4) \quad |\eta_n(t)/t| > \varepsilon', \quad |\eta_n(T_i)/T_i| < \varepsilon'/2 \quad (i=1,2)$$

gilt. Dann aber wäre $|\eta_n(t)| < \frac{\varepsilon'}{2} T_2$ wegen der Monotonie der Interpolation; daraus folgte $|\eta_n(t)| < \varepsilon' t$, und es wäre $|\eta_n(t)/t| < \varepsilon'$ im Widerspruch zu (4). Daher kann man folgendermassen abschätzen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\sup_{t \geq s_{n_0}^2 / s_n^2} \left| \frac{\eta_n(t)}{t} \right| > \varepsilon' \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[|\xi(s_k^2)| > \frac{\varepsilon'}{2} \frac{s_k^2}{s_n} \text{ für ein } k \geq n_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} P \left[\max_{s_{n_0}^2 \cdot 2^{j-1} \leq s_k^2 \leq s_{n_0}^2 \cdot 2^j} |\xi(s_k^2)| > \frac{\varepsilon'}{2} \frac{2^{j-1} s_{n_0}^2}{s_n} \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} P \left[\max_{s_k^2 \leq s_{n_0}^2 \cdot 2^j} |\xi(s_k^2)| > \frac{\varepsilon'}{2} \frac{2^{j-1} s_{n_0}^2}{s_n} \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16}{\varepsilon'^2} \frac{s_n^2}{s_{n_0}^2} \cdot 2^{-j} = \frac{16}{\varepsilon'^2} \frac{s_n^2}{s_{n_0}^2}.
 \end{aligned}$$

Hierbei kam die Kolmogorovsche Ungleichung zur Anwendung. Es ist nun unmittelbar zu sehen, dass (2) erfüllt ist mit $t_m = 32 \varepsilon^{-1} m^2 2^m$. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Anmerkung: Ein Spezialfall dieses Satzes folgt aus [11] (Satz 1.3) (private Mitteilung von V. STRASSEN).

§ 2. Anwendungen

Unter Anwendung von Satz 1 berechnen wir im folgenden die Grenzverteilungen einiger spezieller Funktionale. Die beiden Arcsin - Gesetze sind dabei bloss illustrationshalber aufgeführt; sie könnten auch direkt aus dem gewöhnlichen Invarianzprinzip durch eine einfache Zusatzüberlegung ohne Verwendung des starken Gesetzes der grossen Zahl abgeleitet werden. Die folgenden Corollare werden unter den Voraussetzungen von Satz 1 behauptet.

Corollar 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\min_{\substack{k \geq n \\ \xi(s_k^2) \xi(s_{k+1}^2) \leq 0}} \left(\frac{s_k^2}{s_n^2} \right) < \alpha \right] = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ gleichmässig

in $\alpha \in [1, \infty)$.

In Worten: die Wartezeit vom Zeitpunkt 0 bis zu dem auf den Zeitpunkt s_n^2 nächstfolgenden Nulldurchgang, ausgedrückt in Vielfachen α von s_n^2 , hat asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ die Verteilungsfunktion $\alpha \rightarrow 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1/\alpha}$.

Beweis: ζ bezeichne (von nun an stets) einen (aber nicht immer denselben) Wienerprozess mit $\zeta(0) = 0$. Nach P. LÉVY gilt für die grösste Wurzel $s = \gamma(\zeta)$ von $\zeta(s) = 0$ ($s \leq 1$)

$$\mathcal{P}[\gamma(\zeta) \leq \alpha] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

(siehe z.B. [4], S.28). Demnach hat die kleinste Wurzel $s = \kappa(\zeta) \geq 1$ von $\zeta(s) = 0$ die Verteilungsfunktion

$$\alpha \rightarrow \mathcal{P}[\kappa(\zeta) \leq \alpha] = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1/\alpha} \quad (\alpha \geq 1)$$

(das folgt aus der Tatsache, dass $t \rightarrow \begin{cases} t \zeta(1/t) & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$ wieder ein Wienerprozess ist; vgl. dazu etwa [4], S.18). Nun ist κ aber ein bezüglich des WIENER - Masses fast sicher stetiges Funktional (denn κ ist eine mit Wahrscheinlichkeit 1 endliche Stoppzeit und folglich $\zeta(\kappa+t) - \zeta(\kappa)$ ein Wienerprozess, der also z.B. das lokale Gesetz vom iterierten Logarithmus erfüllt). Daher approximiert die Verteilung von $\kappa(\eta_n)$ diejenige von $\kappa(\zeta)$ für $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}[\kappa(\eta_n) < \alpha] = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1/\alpha} \quad (\alpha \geq 1).$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \kappa(\eta_n) - \min_{\substack{\xi(\xi_k^2) \leq \xi(\xi_{k+n}^2) \leq 0 \\ k \geq n}} \left(\frac{\xi_k^2}{\xi_{k+n}^2} \right) \right| = 0$ folgt daraus die Behauptung

(die Gleichmässigkeit der Konvergenz folgt aus der Monotonie der approximierenden Funktionen und der Stetigkeit der Grenzfunktion).

Corollar 2. Unter der Voraussetzung $EX_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots$) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[n \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2} \chi_{[\xi_i > 0]} < \alpha \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} \quad \text{gleichm\"assig in} \\ \alpha \in [0, 1].$$

Beweis: F\"ur ζ gilt das bekannte Arcsin - Gesetz:

$$P \left[\lambda \{ t: \zeta(t) > 0 \} < \alpha \right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

wobei λ das Lebesguemass auf dem Einheitsintervall ist (siehe z.B. [4], S.57). Sei μ das durch

$$\mu(A) = \int_{A \cap [1, \infty)} \frac{1}{t^2} dt \quad (A \text{ Borelmenge reeller Zahlen})$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmass. Die Abbildung T , gegeben durch

$$(Tx)(t) = \begin{cases} t x(1/t) & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} \quad (x \in C_1[0, \infty)),$$

ist eine bez\"uglich des WIENER - Masses massstreue Isometrie von $C_1[0, \infty)$ auf sich. Wegen $\mu\{t: x(t) > 0\} = \lambda\{t: (Tx)(t) > 0\}$ ($x \in C_1[0, \infty)$) hat $\mu\{t: \zeta(t) > 0\}$ dieselbe Verteilung wie $\lambda\{t: \zeta(t) > 0\}$ und ist gleich diesem ein fast sicher stetiges Funktional. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass sich

$$\mu\{t: \eta_n(t) > 0\} \quad \text{und} \quad n \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2} \chi_{[\xi_i > 0]}$$

asymptotisch beliebig wenig unterscheiden; man f\"uhre zu diesem Zweck die folgende Interpolation ein: f\"ur $t \in [i, i+1]$ sei $\xi(t) = \xi(i)$, falls $t - i \leq 1 - i^{-2}$, linear und stetig sonst ($i = 1, 2, \dots$). Damit ist f\"ur $n > 1$

$$\left| \mu\{t: \eta_n(t) > 0\} - n \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2} \chi_{[\xi_i > 0]} \right| = n \left| \int_n^\infty \chi_{[\xi(t) > 0]} \frac{dt}{t^2} - \sum_{i \geq n} \frac{1}{i^2} \chi_{[\xi_i > 0]} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq n \sum_{i \geq n} \left| \int_i^{i+1} \chi_{[\xi(i) > 0]} \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{i^2} \chi_{[\xi(i) > 0]} \right| \\
 &= n \sum_{i \geq n} \left| \int_{i+1-i^{-2}}^{i+1} \chi_{[\xi(i) > 0]} \frac{dt}{t^2} - \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1-i^{-2}} - \frac{1}{i^2} \right) \chi_{[\xi(i) > 0]} \right| \\
 &\leq 2n \sum_{i \geq n} (i^{-4} + i^{-3}) = o(1).
 \end{aligned}$$

Corollar 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\max_k \left\{ s_k^2 : \frac{1}{s_k^2} \xi(s_k^2) \geq \frac{\theta}{s_n} \right\} < \alpha s_n^2 \right] = \theta \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\theta^2 u/2} du$$

gleichmässig in $\alpha, \theta > 0$.

Beweis: Für $x \in C_1[0, \infty)$ sei $\bar{\sigma}_\theta(x) := \inf \{t: x(t) = \theta\}$. $\bar{\sigma}_\theta$ ist ein (bzgl. des WIENER - Masses) fast sicher stetiges Funktional auf $C_1[0, \infty)$, und es gilt (siehe [4], S.25)

$$P \left[\bar{\sigma}_\theta(\zeta) \leq \alpha \right] = \theta \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\theta^2/2u} du.$$

Da die Abbildung T (s.o.) eine massstreue Isometrie ist, ist auch

$$x \rightarrow (\bar{\sigma}_\theta \circ T)(x) = \left(\sup \{t > 0 : x(t) = \theta t\} \right)^{-1}$$

ein fast sicher stetiges Funktional auf $C_1[0, \infty)$ und daher ebenso $x \rightarrow \bar{\tau}_\theta(x) := \sup \{t > 0 : x(t) = \theta t\}$. Unter Berücksichtigung von

$$\theta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\theta^2/2u} du = 1$$

erhält man

$$P[\bar{\tau}_\theta(\zeta) < \alpha] = 1 - P[\bar{\sigma}_\theta(\zeta) \leq 1/\alpha] = \theta \int_{1/\alpha}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\theta^2/2u} du,$$

woraus wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{s_k^2}{s_n^2} : x\left(\frac{s_k^2}{s_n^2}\right) \geq \theta \frac{s_k^2}{s_n^2} \right\} = \bar{\tau}_\theta(x)$ nach Satz 1 die Behauptung folgt.

Corollar 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\max \left\{ s_k^2 : \frac{1}{s_k^2} \left| \zeta(s_k^2) \right| \geq \frac{\theta}{s_k} \right\} < \alpha s_n^2 \right] = \theta \int_0^\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)^2 \theta^2 u}{2}} du$$

gleichmässig in $\alpha, \theta > 0$.

Beweis: In Analogie zum Beweis des vorigen Corollars genügt es, für den Wienerprozess ζ die Verteilung des Funktionals $x \rightarrow \sigma_\theta(x) := \inf \{t: |x(t)| = \theta\}$ zu berechnen. Wir zeigen, dass

$$P \left[\sigma_\theta(\zeta) \leq \alpha \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \int_{(2i-1)\theta}^{(2i+1)\theta} e^{-\frac{u^2}{2\alpha}} du$$

gilt (zur Methode siehe [4], S.30, Problem 8):

$$\begin{aligned} P \left[\sigma_\theta(\zeta) > \alpha \right] &= P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta], \sigma_\theta(\zeta) > \alpha \right] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta] + 2\theta i, \sigma_\theta(\zeta) > \alpha \right], \end{aligned}$$

da alle Terme mit $i \neq 0$ verschwinden; dieser Ausdruck ist weiter

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta] + 2\theta i \right] - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta] + 2\theta i, \sigma_\theta(\zeta) \leq \alpha \right].$$

Da der zweite Term verschwindet -

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta] + 2\theta i, \sigma_\theta(\zeta) \leq \alpha \right] \\ &= \int_0^\alpha P \left[\zeta(\sigma_\theta(\zeta)) = -\theta, \sigma_\theta(\zeta) \leq du \right] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha-u) \in [-\theta, \theta] + (2i+1)\theta \right] \\ &+ \int_0^\alpha P \left[\zeta(\sigma_\theta(\zeta)) = \theta, \sigma_\theta(\zeta) \leq du \right] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha-u) \in [-\theta, \theta] + (2i-1)\theta \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ist } P \left[\sigma_\theta(\zeta) > \alpha \right] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i P \left[\zeta(\alpha) \in [-\theta, \theta] + 2\theta i \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \int_{(2i-1)\theta}^{(2i+1)\theta} e^{-\frac{u^2}{2\alpha}} du, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Corollar 5. Für $\alpha > 0$ gilt gleichmässig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[s_n \max_{k \geq n} \left(\frac{1}{s_k^2} \zeta(s_k^2) \right) < \alpha \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-u^2/2} du$$

(zur Verteilung von $\max(\zeta(t): 0 \leq t \leq 1)$ siehe [4], S.27).

Corollar 6. Seien die X_1 ($i = 1, 2, \dots$) identisch verteilt. Dann gilt gleichmässig in α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\max_{k \geq n} \frac{1}{k} \zeta(k) \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \mid \frac{1}{n} \zeta(n) = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \right] = e^{-2\alpha(\alpha-\beta)} \quad (\alpha \geq \beta \vee 0).$$

Beweis: Man betrachte die beiden (stetigen) Funktionale auf $C_1[0, \infty)$:

$$F: x \rightarrow \max_{t \geq 1} \frac{x(t)}{t}, \quad \tilde{F}: x \rightarrow \max_{t \geq 0} \frac{x(t)}{t+1}.$$

Damit können wir schreiben: $P[F(\eta_n) \geq \alpha \mid \eta_n(1) = \beta] = P[\tilde{F}(\eta_n + \beta) \geq \alpha]$,

und dieser Ausdruck konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen $P[\tilde{F}(\zeta + \beta) \geq \alpha] =$

$P[F(\zeta) \geq \alpha \mid \zeta(1) = \beta]$. Zur Berechnung dieser Grenzverteilung

benutzen wir Problem 1 aus [4] (S.27):

$$\begin{aligned} P \left[\max_{t \geq 1} \frac{\zeta(t)}{t} \geq \alpha \mid \zeta(1) = \beta \right] &= P \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta(t) \geq \alpha \mid \zeta(1) = \beta \right] \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial b} P \left[\max_{0 \leq t \leq 1} \zeta(t) \geq \alpha, \zeta(1) \leq b \right]}{\frac{\partial}{\partial b} P[\zeta(1) \leq b]} \Bigg|_{b=\beta} \\ &= \sqrt{2\pi} e^{\beta^2/2} \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^b \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2v-u) e^{-(2v-u)^2/2} du dv \Bigg|_{b=\beta} \\ &= e^{-2\alpha(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Dieses Verteilungsgesetz sagt zum Beispiel aus, dass man beim Bilden der statistischen Mittelwerte $\frac{1}{k} \xi(k)$ zwar einen positiven Ausschlag derselben von der Grösse $> \frac{1}{\sqrt{n}}$ mit einer Wahrscheinlichkeit > 0.1 nach der n -ten Beobachtung X_n noch zu erwarten hat, falls $\frac{1}{n} \xi(n)$ schon nahe am wahren Wert liegt, dass aber dieser Ausschlag mit Wahrscheinlichkeit > 0.996 nicht $> \frac{2}{\sqrt{n}}$ sein wird. Das liegt an der Wachstumsordnung der Grenzverteilungsfunktion, die für $\alpha \rightarrow \infty$ stärker als bloss exponentiell verschwindet; für die approximierenden Verteilungen ist allerdings aus dem Bewiesenen eine solche Wachstumsaussage noch nicht abzuleiten; vielmehr gilt für sie eine solche Feststellung über die Stärke des Verschwindens im Unendlichen bloss bis auf einen beliebig kleinen gleichmässigen Approximationsfehler, der jedoch nicht nur einer qualitativen, sondern - wie wir in § 4 durch eine Fehlerabschätzung zeigen werden - sogar einer quantitativen Beurteilung der Häufigkeitsverteilungen durchaus nicht im Wege steht.

Corollar 7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[s_n \max_{k \geq n} \left| \frac{1}{s_n^2} \xi(s_k^2) \right| < \alpha \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (2i+1) e^{- (2i+1)^2 u^2 / 2} du$$

gleichmässig in $\alpha > 0$ (die Grenzverteilungsfunktion ist ja gleich $\alpha \rightarrow P[s_\alpha(\xi) > 1]$).

§ 3. Ein Verteilungs - Invarianzprinzip für das Gesetz des iterierten Logarithmus

Sei $C_2[0, \infty)$ der Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen x auf $[0, \infty)$, für die $x(0) = 0$ und

$$\|x\|_2 := \sup_{t \geq 0} \frac{|x(t)|}{\sqrt{2(t \vee 3) \log \log(t \vee 3)}} < \infty$$

ist. $C_2[0, \infty)$ ist, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_2$, ein - im übrigen inseparabler - Banachraum (die Vollständigkeit ist trivial; die Inseparabilität erhellt aus der Überabzählbarkeit des Systems

$$\{t \rightarrow (2(t \vee 3) \log \log(t \vee 3))^{1/2} \sin pt : p \geq 0 \text{ reell}\}$$

von Funktionen, welche paarweise den Normabstand 2 haben).

Sei $X = \{X_i : i = 1, 2, \dots\}$ eine Folge identisch verteilter unabhängiger Zufallsvariabler mit $EX_1 = 0$ und $EX_1^2 = 1$. Wie in § 1 bilde man aus X $\xi(t)$ und $\eta_n(t)$ ($0 \leq t < \infty$), nur sei ξ jetzt speziell die lineare Interpolation der Partialsummen.

Satz 2. Die Folge der Verteilungen von η_n ($n = 1, 2, \dots$) konvergiert für $n \rightarrow \infty$ in $C(C_2[0, \infty))$ schwach gegen das WIENER - Mass.

Beweis: Die Tatsache, dass die Prozesse η_n (wie auch jeder Wienerprozess) mit Wahrscheinlichkeit 1 Werte in $C_2[0, \infty)$ annehmen, beruht auf der Gültigkeit des Gesetzes vom iterierten Logarithmus für ξ :

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \frac{|\eta_n(t)|}{\sqrt{2(t \vee 3) \log \log(t \vee 3)}} &= \max \left\{ \frac{\sup_{t \leq 3} |\eta_n(t)|}{\sqrt{6 \log \log 3}}, \sup_{t \geq 3n} \frac{|\xi(t)|}{\sqrt{2t \log \log t/n}} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\sup_{t \leq 3} |\eta_n(t)|}{\sqrt{6 \log \log 3}}, \sup_{t \geq 3n} \left(\frac{\log \log t}{\log(\log t - \log n)} \right)^{1/2} \sup_{t \geq 3n} \frac{|\xi(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} \right\} < \infty \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

In metrischen Räumen genügt es, stochastische Konvergenz statt der schwachen Konvergenz zu beweisen; wir werden daher zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\sup_{t \geq 0} \frac{|\eta_n(t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta(\tau t)|}{\sqrt{2(t \vee 3) \log(t \vee 3)}} \geq \varepsilon \right] = 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Um das zu erreichen, realisieren wir $\xi(m)$ nach einem Satz von SKOROKHOD ([10], S.163) als $\zeta(\sum_{i=1}^m \tau_i)$ ($m = 1, 2, \dots$), wobei die τ_i unabhängige identisch verteilte nichtnegative Zufallsvariable mit $E \tau_1 = 1$ sind. Das starke Gesetz der grossen Zahl hat zur Folge

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i = 1 \right] = 1.$$

Zu gegebenen reellen Zahlen $\delta > 0$ und $1 < r < 2$ gibt es daher eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\delta, r)$ derart, dass $n_0/(n_0-2) < r$ gilt und mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \delta$ das Ereignis

$$\Omega = \left[\frac{1}{r} < \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i / (n-1) < r \quad \text{für alle } n \geq n_0 \right]$$

eintritt. Zu $t > r^3$ sei $k = k(t)$ die natürliche Zahl mit $r^{k+2} < t \leq r^{k+3}$. Dann gilt für $n \geq n_0(\delta, r)$

$$r^{k(t)} < t - 1/n, \quad t \leq r^{k(t)+4} \quad \text{und}$$

$$(5) \quad \Omega \subset \left[r^{k(t)} < \left\{ \sum_{i=1}^{[nt]-1} \tau_i / n \right\} < r^{k(t)+4} \quad \text{für alle } t > r^3 \right],$$

welches letztere Ereignis erst recht mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \delta$ eintritt.

Sei nun t^* eine reelle Zahl > 8 . Unter Verwendung von (5) erhalten wir die Abschätzung ($n \geq n_0(\delta, r)$):

$$\begin{aligned}
 P \left[\sup_{t \geq t^*} \frac{|\eta_n(t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta(nt)|}{\sqrt{2t \log \log t}} > \varepsilon \right] &= P \left[\sup_{t \geq t^*} \frac{n^{-1/2} |\zeta(nt) - \zeta(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} > \varepsilon \right] \\
 &\leq P \left[\sup_{r^k \leq t < s \leq r^{k+4}} n^{-1/2} |\zeta(ns) - \zeta(nt)| > \varepsilon \sqrt{2r^k \log \log r^k} \text{ für ein } k \geq k(t^*) \right] + \delta \\
 &\leq \sum_{k=k(t^*)} P \left[\sup_{r^k \leq t < s \leq r^{k+4}} |\zeta(s) - \zeta(t)| > \varepsilon \sqrt{2r^k \log \log r^k} \right] + \delta \\
 &= \sum_{k=k(t^*)} P \Omega_k + \delta,
 \end{aligned}$$

wobei $\Omega_k = \left[\sup_{r^k \leq t < s \leq r^{k+4}} |\zeta(s) - \zeta(t)| > \varepsilon \sqrt{2r^k \log \log r^k} \right]$

gesetzt ist. Wir zeigen nun dass diese Summe konvergiert und folglich für grosses $k(t^*)$ klein wird. Unter Anwendung des Spiegelungsprinzips von D. ANDRÉ erhält man

$$\begin{aligned}
 P \Omega_k &\leq P \left[\sup_{r^k \leq t \leq r^{k+4}} |\zeta(t) - \zeta(r^k)| > \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2r^k \log \log r^k} \right] \\
 &\leq 2P \left[|\zeta(r^{k+4}) - \zeta(r^k)| > \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2r^k \log \log r^k} \right] \\
 &= 4P \left[N(0, r^{k+4} - r^k) > \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2r^k \log \log r^k} \right],
 \end{aligned}$$

wobei $N(o, u)$ wie üblich eine mit Erwartung o und Varianz u normal verteilte Zufallsvariable bedeutet. Daher existieren (von n und $k(t^*)$ unabhängige) Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 mit

$$\begin{aligned}
 P \Omega_k &\leq 4P \left[N(0, 1) > \frac{\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2r^k \log \log r^k}}{\sqrt{r^k(r^4 - 1)}} \right] \\
 &\leq c_1 \int_0^\infty e^{-u^2/2} du \\
 &\quad \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{2 \log \log r^k}{r^4 - 1} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_2 \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{r^4 - 1}{2 \log \log r^k} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{8} \left(\frac{2 \log \log r^k}{r^4 - 1} \right) \right\} \\ &\leq c_3 (\log k(t^*))^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\log k}{r^4 - 1} \right\} \\ &\leq c_4 \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{\varepsilon^2}{4(r^4 - 1)}}. \end{aligned}$$

Wählt man also t^* , und damit auch $k(t^*)$, hinreichend gross ($r > 1$ sei von vornherein so bestimmt, dass $\varepsilon^2 > 4(r^4 - 1)$ ist), so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit kleiner als 2δ , unabhängig von n. Es bleibt nun noch abzuschätzen

$$(6) \quad P \left[\sup_{0 \leq t \leq t^*} \frac{|\eta_n(t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta(nt)|}{\sqrt{2(t \vee 3) \log \log (t \vee 3)}} \geq \varepsilon \right].$$

Dies ist

$$\leq P \left[\sup_{0 \leq t \leq t^*} n^{-1/2} |\zeta(nt) - \zeta(nt)| > \varepsilon^* \right] \text{ mit } \varepsilon^* = \varepsilon \sqrt{2t^* \log \log t^*}$$

$$\leq P \left[\sup_{\substack{0 \leq nt \leq nt^*+1 \\ nt \text{ ganzzahlig}}} n^{-1/2} |\zeta(nt) - \zeta(nt)| \geq \varepsilon^*/6 \right]$$

$$+ P \left[\sup_{\substack{0 \leq nt \leq nt^*+1 \\ nt \text{ ganzzahlig}}} n^{-1/2} |\zeta(nt) - \zeta(nt)| < \varepsilon^*/6 \text{ und } \sup_{\substack{|s-t| \leq 1/n \\ 0 \leq s, t \leq t^*+1/n}} n^{-1/2} |\zeta(ns) - \zeta(nt)| \geq \varepsilon^*/6 \right];$$

denn andernfalls existierte eine reelle Zahl θ mit $nt-1 \leq n\theta \leq nt$ für ein ganzzahliges nt , derart dass

$$(7) \quad n^{-1/2} |\zeta(n\theta) - \zeta(n\theta)| \geq \varepsilon^*,$$

aber

$$\left. \begin{aligned} n^{-1/2} |\zeta(nt-1) - \zeta(nt-1)| \\ n^{-1/2} |\zeta(nt) - \zeta(nt)| \end{aligned} \right\} < \frac{\varepsilon^*}{6} \text{ und } \sup_{\substack{|s-t| \leq 1/n \\ 0 \leq s, t \leq t^*+1/n}} n^{-1/2} |\zeta(ns) - \zeta(nt)| < \frac{\varepsilon^*}{6};$$

und daraus folgte $n^{-1/2} |\xi(nt-1) - \xi(nt)| < \varepsilon_2^*$, woraus man folgendermassen einen Widerspruch zu (7) ableitet:

$$\begin{aligned} n^{-1/2} |\xi(n\theta) - \xi(n\theta)| &< \frac{\varepsilon^*}{4} + n^{-1/2} \min \left\{ |\xi(n\theta) - \xi(nt-1)|, |\xi(n\theta) - \xi(nt)| \right\} \\ &< \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{6} + n^{-1/2} \min \left\{ |\xi(n\theta) - \xi(nt-1)|, |\xi(n\theta) - \xi(nt)| \right\} \\ &< \frac{\varepsilon^*}{4} + \frac{\varepsilon^*}{3} < \varepsilon^*. \end{aligned}$$

Daher kann man nun (6) weiter abschätzen durch

$$P \left[\sup_{\substack{0 \leq nt \leq nt^*+1 \\ nt \text{ ganzzahlig}}} n^{-1/2} \left| \xi \left(\sum_{i=1}^{nt} \tau_i \right) - \xi(nt) \right| \geq \frac{\varepsilon^*}{6} \right] + P \left[\sup_{\substack{|s-t| \leq 1/n \\ 0 \leq s, t \leq t^*+1/n}} |\xi(s) - \xi(t)| \geq \frac{\varepsilon^*}{6} \right].$$

Von beiden Summanden kann man zeigen, dass sie für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen; im Beweis haben wir uns Ideen aus [3] zunutze gemacht.

Satz 2 sichert die Existenz von Grenzverteilungen für Funktionale der Gestalt

$$X \longrightarrow \max_{k \geq 3n} \left\{ \frac{k}{n} : n^{-1/2} \xi(k) \geq c \sqrt{2 \frac{k}{n} \log \log \frac{k}{n}} \right\} \quad (c > 1)$$

oder

$$X \longrightarrow \max \left\{ \frac{k}{n} : \xi(k) \geq k^\lambda n^{1/2-\lambda} \right\} \quad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1 \right)$$

und reduziert die Berechnung dieser Verteilungen auf den Fall des Wienerprozesses. Jedoch scheinen diese Verteilungen nicht explizit bekannt zu sein.

§ 4. Geschwindigkeit der Konvergenz

Sei $X = \{X_1, X_2, \dots\}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariabler mit $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ und $\sup |X_1| = C < \infty$.

$\xi(k)$ bezeichne - wie bisher - die k -te Partialsumme dieser Folge.

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

$$\bar{\Xi}_n = \left[g_1\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} \xi(k) < g_2\left(\frac{k}{n}\right) \text{ für alle } k = 1, 2, \dots \right] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$Z = \left[g_1(t) < \zeta(t) < g_2(t) \text{ für alle } t \geq 0 \right];$$

dabei bedeutet ζ einen Wienerprozess mit $\zeta(0) = 0$, und g_i ($i=1,2$) sind stetige, auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbare reellwertige Funktionen auf $[0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $g_1(0) < 0 < g_2(0)$;
- (ii) $-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t)/t < 0 < \lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t)/t < +\infty$;
- (iii) $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |g_1(t) - t \dot{g}_1(t)| < \infty$.

Diese Eigenschaften seien zum Zwecke der Abschätzung von $|P\bar{\Xi}_n - PZ|$ noch genauer durch sechs Konstanten $K_1, K_2, G_1, \dots, G_4$ festgelegt:

$$G_1 \leq |g_1(0)| \leq G_2 ,$$

$$G_3 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |g_1(t)/t| \leq G_4 ,$$

$$\sup_{0 < t \leq 1} |\dot{g}_1(t)| \leq K_1 ,$$

$$\sup_{t \geq 1} |g_1(t) - t \dot{g}_1(t)| \leq K_2 \quad (i = 1, 2).$$

In Verallgemeinerung eines Satzes von SKOROKHOD ([8],[9],[10]), der sich auf die Situation des gewöhnlichen Invarianzprinzips bezieht, beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 3. Es existiert eine Konstante L, die nur von C, K₁, K₂ und G₁, ..., G₄ abhängt, mit der Eigenschaft

$$|P \overline{\subseteq}_n - PZ| \leq L \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Anmerkung: Setzt man $g_1(t) \equiv -\infty$ ($t \geq 0$), ohne weiter die obigen Voraussetzungen über g_1 zu berücksichtigen, so bleibt die Aussage des Satzes richtig.

Der Beweis dieses Satzes beruht - soweit seine Technik über die Mittel des SKOROKHODschen Beweises hinausgeht - einerseits darauf, dass sich die in Rede stehenden Ereignisse in zwei Bestandteile zerlegen lassen, deren Wahrscheinlichkeiten getrennt abgeschätzt werden können (dabei wird die bekannte Zeitinversion des Wienerprozesses für die approximierenden Pfade simuliert), andererseits auf der Möglichkeit, diese Abschätzungen wieder zu einer zusammenzusetzen.

Beweis von Satz 3: O.B.d.A. sei (nach [10], S.163) $\xi(k) = \zeta(\sum_{i=1}^k \tau_i)$ ($k = 1, 2, \dots$) mit nichtnegativen unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen τ_i ($E \tau_1 = 1$). Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\overline{\subseteq}_n^{(1)} = \left[\beta_1\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} \xi(k) < \beta_2\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{für alle } k \leq n \right],$$

$$\overline{\subseteq}_n^{(2)} = \left[\beta_1\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} \xi(k) < \beta_2\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{für alle } k \geq n \right],$$

$$Z_n^{(1)} = [g_1(t) < \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta(nt) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1]],$$

$$Z_n^{(2)} = [g_1(t) < \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta(nt) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [1,\infty)],$$

$$Z_n = Z_n^{(1)} \cap Z_n^{(2)}.$$

$$\text{Setzt man } \hat{g}_i(t) := \begin{cases} t g_i(1/t) & (0 < t \leq 1) \\ \lim_{t \downarrow 0} t g_i(1/t) & (t = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2),$$

$$\text{so ist } \left| \frac{d}{dt} \hat{g}_i(t) \right| = |g_i(1/t) - \dot{g}_i(1/t)/t| \leq K_2 < \infty,$$

und es gilt

$$\Xi_n^{(2)} = [\hat{g}_1(\frac{n}{k}) < \frac{\sqrt{n}}{k} \zeta(k) < \hat{g}_2(\frac{n}{k}) \quad \text{für alle } k \geq n],$$

$$Z_n^{(2)} = [\hat{g}_1(t) < \hat{\zeta}_n(t) < \hat{g}_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1]]$$

$$\text{mit } \hat{\zeta}_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{n}} \zeta(n/t) & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

(ζ_n ist ein Wienerprozess auf $C_1[0, \infty)$).

Der Beweis der Behauptung beruht nun im wesentlichen auf der Möglichkeit folgender Abschätzungen:

$$P(\Xi_n^{(1)} \Delta Z_n^{(1)}) \leq L_1 \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (n=2,3,\dots)$$

(L_1 abhängig allein von C, K_1, G_1, G_2) und

$$P(\Xi_n^{(2)} \Delta Z_n^{(2)}) \leq L_2 \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (n=2,3,\dots)$$

(L_2 abhängig allein von C, K_2, G_3, G_4).

Die zweite Abschätzung ist der Inhalt des folgenden Satzes 4, die erste lässt sich in ähnlicher Weise durch Verschärfung des

SKOROKHODschen Beweises gewinnen. Die Behauptung von Satz 3 folgt dann aus der Ungleichung

$$(\Xi_n^{(1)} \cap \Xi_n^{(2)}) \Delta (Z_n^{(1)} \cap Z_n^{(2)}) \subset (\Xi_n^{(1)} \Delta Z_n^{(1)}) \cup (\Xi_n^{(2)} \Delta Z_n^{(2)}) ;$$

denn

$$\begin{aligned} |P \Xi_n - P Z| &= |P \Xi_n - P Z_n| \leq P(\Xi_n \Delta Z_n) \\ &= P((\Xi_n^{(1)} \cap Z_n^{(1)}) \Delta (\Xi_n^{(2)} \cap Z_n^{(2)})) \\ &\leq P(\Xi_n^{(1)} \Delta Z_n^{(1)}) + P(\Xi_n^{(2)} \Delta Z_n^{(2)}) \\ &\leq (L_1 + L_2) \frac{\log n}{\sqrt{n}} . \end{aligned}$$

Es bleibt also noch der folgende Hilfssatz zu beweisen, den wir etwas allgemeiner, als für den vorigen Beweis notwendig, formulieren, weil er selbständiges Interesse beansprucht. Um nicht zu viele verschiedene Bezeichnungen einführen zu müssen, nennen wir die beiden Schranken hier wieder g_1 und g_2 ; nur sollen diese nun auf dem reellen Intervall $[0, \alpha]$ (α eine positive reelle Zahl) definiert sein, stetig und in $(0, \alpha]$ stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g_1(0) &< 0 < g_2(0) , \\ 0 < G_1 < |g_1(0)| < G_2 < \infty \\ \sup_{0 \leq t \leq \alpha} |\dot{g}_i(t)| &\leq K < \infty \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} g_1(0) < 0 < g_2(0) , \\ 0 < G_1 < |g_1(0)| < G_2 < \infty \\ \sup_{0 \leq t \leq \alpha} |\dot{g}_i(t)| &\leq K < \infty \end{aligned}} \right\} \quad (i=1,2) .$$

Die obigen Voraussetzungen über den stochastischen Prozess $k \rightarrow \xi(k)$ übernehmen wir, ausserdem liege derselbe Wahrscheinlichkeitsraum vor wie im letzten Satz (speziell ist damit $\xi(k) = \zeta(\sum_{i=1}^k \tau_i)$ ($k=1, 2, \dots$).

mit demselben Wienerprozess ζ wie oben). Sei

$$\Xi_n^\alpha = \left[g_1\left(\frac{n}{k}\right) < \frac{\sqrt{n}}{k} \zeta(k) < g_2\left(\frac{n}{k}\right) \text{ für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right],$$

$$Z_n^\alpha = \left[g_1(t) < \frac{t}{\sqrt{n}} \zeta(\eta t) < g_2(t) \text{ für alle } t \in (0, \alpha] \right],$$

$$Z^\alpha = \left[g_1(t) < \zeta(t) < g_2(t) \text{ für alle } t \in [0, \alpha] \right].$$

Satz 4. Es gibt eine Konstante M , die nur von α_0 , K , C , G_1 und G_2 abhängt, mit der Eigenschaft

$$|P \Xi_n^\alpha - P Z^\alpha| \leq |P(\Xi_n^\alpha \Delta Z_n^\alpha)| \leq M \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

für $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Zum Beweis benötigen wir Lemma 1 aus [10], S.170; wir geben es in geringfügig geänderter Formulierung wieder:

Lemma 1. Seien $p_1, \dots, p_n$ unabhängige Zufallsvariable mit $E p_i = 0$, $E p_i^2 = b^2 > 0$, $E p_i^4 \leq C_1$ ($i = 1, \dots, n$). Dann gilt

$$P \left[\sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k p_i \right| > 2b\sqrt{n} \log n \right] \leq \frac{1}{n} (C_1 + 2 \exp[\sqrt{C_1} + \frac{e}{2}]) =: \frac{C_2}{n}.$$

Lemma 2. Sei $\{p_1, p_2, \dots\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $E p_i = 0$, $E p_i^2 = b^2 > 0$ und $E p_i^4 \leq C_1$ ($i = 1, 2, \dots$). Für

$$\Theta_k := \sum_{i=1}^k p_i \quad (k = 1, 2, \dots)$$

gilt ($n \geq 8\alpha_0$)

$$P \left[|\Theta_k| > 4b\sqrt{k} \log k \text{ für ein } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right] \leq \alpha_0 C_2 / n.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Lemma 1:

$$\begin{aligned}
 & P[|\theta_k| > 4b\sqrt{k} \log k \text{ für ein } k \text{ mit } \alpha k \geq n] \\
 & \leq \sum_{\alpha 2^{m-1} \geq n} P \left[\sup_{1 \leq k \leq 2^m} |\theta_k| > 4b\sqrt{2^{m-1}} \log 2^{m-1} \right] \\
 & = \sum_{\alpha 2^{m-1} \geq n} P \left[\sup_{1 \leq k \leq 2^m} |\theta_k| > 2b\sqrt{2^m} \frac{\sqrt{2}^{(m-1)}}{m} \log 2^m \right] \\
 & \leq \sum_{\alpha 2^{m-1} \geq n} P \left[\sup_{1 \leq k \leq 2^m} |\theta_k| > 2b\sqrt{2^m} \log 2^m \right] \\
 & \leq C_2 \sum_{m \geq \frac{\log n - \log \alpha}{\log 2} + 1} 2^{-m} \leq \frac{\alpha C_2}{n} \leq \frac{\alpha_0 C_2}{n}.
 \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4: Nach [10], S.163 hängt $\text{Var}(\tau_i) = b^2 > 0$ allein von einer oberen Schranke des achten Moments von X_1 , also wegen $EX_1^8 \leq C^8$, nur von C ab ($i = 1, 2, \dots$). Für $k = 1, 2, \dots$ sei

$$\rho_k = \frac{1}{b}(\tau_k - 1) \quad \text{und} \quad \theta_k = \sum_{i=1}^k \rho_i, \quad \text{mithin} \quad \sum_{i=1}^k \tau_i = b\theta_k + k.$$

Damit ist $\Xi_n^\alpha = [g_1(\frac{n}{k}) < \frac{\sqrt{n}}{k} \zeta(b\theta_k + k) < g_2(\frac{n}{k}) \text{ für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n].$

Nun werden die Pfade von ζ nach SKOROKHOD so durch die τ_i gestoppt, dass für $s \in (\sum_{i \leq k} \tau_i, \sum_{i \leq k+1} \tau_i)$

$$|\zeta(s) - \zeta(\sum_{i \leq k} \tau_i)| \leq C$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\left[g_1\left(\frac{n}{k}\right) + \frac{\sqrt{n}C}{k} < \frac{\sqrt{n}}{k} \zeta(s) < g_2\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{\sqrt{n}C}{k} \text{ für alle } s \in (b\theta_k + k, b\theta_{k+1} + k + 1); \text{ für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right]$$

$$\subset \Xi_n^\alpha \subset$$

$$\left[g_1\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{\sqrt{n}C}{k} < \frac{\sqrt{n}}{k} \zeta(s) < g_2\left(\frac{n}{k}\right) + \frac{\sqrt{n}C}{k} \text{ für alle } s \in (b\theta_k + k, b\theta_{k+1} + k+1); \text{ für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right].$$

Die Substitution $t = n/s$ liefert für $s > 0$ $\zeta(s) = \frac{\sqrt{n}}{t} \hat{\zeta}_n(t)$ ($\hat{\zeta}_n$ der schon oben definierte Wienerprozess); und so erhält man die weitere Inklusion

$$\left[\frac{kt}{n} g_1\left(\frac{n}{k}\right) + \frac{Ct}{\sqrt{n}} < \hat{\zeta}_n(t) < \frac{kt}{n} g_2\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{Ct}{\sqrt{n}} \text{ für alle } t \in \left(\frac{n}{b\theta_{k+1} + k+1}, \frac{n}{b\theta_k + k} \right); \right. \\ \left. \text{für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right]$$

$$C \stackrel{\alpha}{=} \alpha C$$

$$\left[\frac{kt}{n} g_1\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{Ct}{\sqrt{n}} < \hat{\zeta}_n(t) < \frac{kt}{n} g_2\left(\frac{n}{k}\right) + \frac{Ct}{\sqrt{n}} \text{ für alle } t \in \left(\frac{n}{b\theta_{k+1} + k+1}, \frac{n}{b\theta_k + k} \right); \right. \\ \left. \text{für alle } k \text{ mit } \alpha k \geq n \right].$$

Zunächst benötigen wir nun eine Abschätzung von $|g_i(\frac{n}{k}) - g_i(t)|$ ($i=1,2$) für $t \in \left(\frac{n}{b\theta_{k+1} + k+1}, \frac{n}{b\theta_k + k} \right)$; da die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $[|\theta_k| > 4b\sqrt{k} \log k \text{ für ein } k \text{ mit } \alpha k \geq n]$ nach Lemma 2 ein $O(1/n)$ ist, können wir dabei $|\theta_k| \leq 4b\sqrt{k} \log k$ (für alle k mit $\alpha k \geq n$) annehmen:

$$\begin{aligned} |g_i\left(\frac{n}{k}\right) - g_i(t)| &\leq K \left| \frac{n}{k} - t \right| \leq K \left| \frac{n}{k} - \frac{n}{k - 4b^2\sqrt{k} \log k} \right| \\ &\leq K \left| \alpha - \frac{\alpha}{n - 4b^2\sqrt{\alpha n} \log(n/\alpha)} \right| \\ &= \alpha K \left| 1 - \frac{1}{1 - 4b^2\sqrt{\alpha} \frac{\log(n/\alpha)}{\sqrt{n}}} \right| \\ &\leq 2K\alpha \frac{4b^2\sqrt{\alpha} \log(\frac{n}{\alpha})}{\sqrt{n}} \leq C_3 \frac{\log n}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

wobei C_3 nur von α , K und C abhängt ($i = 1, 2$).

Andererseits gilt für dieselben t

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \left| \frac{kt}{n} - 1 \right| &\leq \left| \frac{k}{n} \frac{n}{k - 4b^2 \sqrt{k} \log k} - 1 \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{1 - \frac{4b^2 \log k}{\sqrt{k}}} - 1 \right| \\
 &\leq \frac{8b^2 \log k}{\sqrt{k}} \leq \frac{8b^2 \log(n/\alpha_0)}{\sqrt{n/\alpha_0}} \leq C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

mit einer nur von C und α_0 abhängigen Konstanten C_4 , so dass wegen

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{kt}{n} g_i\left(\frac{n}{k}\right) - g_i(t) \right| &\leq \left| \frac{kt}{n} g_i\left(\frac{n}{k}\right) - g_i\left(\frac{n}{k}\right) \right| + \left| g_i\left(\frac{n}{k}\right) - g_i(t) \right| \\
 &\leq (G_2 + K\alpha_0) \left| \frac{kt}{n} - 1 \right| + C_3 \frac{\log n}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

eine nur von C , K , G_2 und α_0 abhängige Konstante C_5 existiert mit

$$\left| \frac{kt}{n} g_i\left(\frac{n}{k}\right) - g_i(t) \right| \leq C_5 \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (i=1,2).$$

Wenn man für Ereignisse Ω_1, Ω_2 und $\varepsilon > 0$ die " ε - Inklusion"

$\Omega_1 \subset_{\varepsilon} \Omega_2$ durch $P(\Omega_1 \sim \Omega_2) < \varepsilon$ definiert, erhält man damit

$$\left[g_1(t) + \frac{Ct}{\sqrt{n}} + \frac{C_5 \log n}{\sqrt{n}} < \hat{g}_n(t) < g_2(t) - \frac{Ct}{\sqrt{n}} - \frac{C_5 \log n}{\sqrt{n}} \text{ für alle } t \in \left[0, \alpha \left(1 + \frac{C_4 \log n}{\sqrt{n}}\right)\right] \right]$$

$$\alpha_0 C_2 / n \stackrel{-\alpha}{\sim} \alpha_0 C_2 / n$$

$$\left[g_1(t) - \frac{Ct}{\sqrt{n}} - \frac{C_5 \log n}{\sqrt{n}} < \hat{g}_n(t) < g_2(t) + \frac{Ct}{\sqrt{n}} + \frac{C_5 \log n}{\sqrt{n}} \text{ für alle } t \in \left[0, \alpha \left(1 - \frac{C_4 \log n}{\sqrt{n}}\right)\right] \right],$$

denn nach (8) gilt:

$$\left| t - \frac{n}{k} \right| \leq \frac{C_4 \alpha \log n}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad t \in \left(\frac{n}{b\theta_{k+1} + k + 1}, \frac{n}{b\theta_k + k} \right);$$

die g_i ($i=1,2$) seien hierbei rechts von α stetig differenzierbar

(mit $|\tilde{g}_i| \leq K$) fortgesetzt. Mit der Abkürzung $\beta_n = \frac{C\alpha_0}{\sqrt{n}} \left(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) + C_5 \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ gilt weiter (9)

$$\left[g_1(t) + \beta_n < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) - \beta_n \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right]$$

$$\stackrel{C}{\alpha_0 C_2/n} \stackrel{\alpha}{=} \stackrel{C}{\alpha_0 C_2/n}$$

$$\left[g_1(t) - \beta_n < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) + \beta_n \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right].$$

Im folgenden schätzen wir $\stackrel{\alpha}{=}$ nun nur noch weiter nach unten ab, die Abschätzung in der anderen Richtung verläuft dazu symmetrisch. Es existiert eine Konstante C_6 (wiederum nur von zulässigen Grössen abhängig) mit (10)

$$\left[g_1(t) < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right]$$

$$\stackrel{C}{C_6 \frac{\log n}{\sqrt{n}}} \left[g_1(t) + \beta_n < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) - \beta_n \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right].$$

Denn da die zweite Menge in der ersten enthalten ist, genügt es zu zeigen, dass die Differenz ihrer Wahrscheinlichkeiten ein $O(\frac{\log n}{\sqrt{n}})$ ist:

$$P \left[g_1(t) < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right]$$

$$- P \left[g_1(t) + \beta_n < \hat{\xi}_n(t) < g_2(t) - \beta_n \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right]$$

$$\leq P \left[-\beta_n < \sup_{0 \leq t \leq \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})} (g_1(t) - \hat{\xi}_n(t)) < 0 \right]$$

$$+ P \left[-\beta_n < \sup_{0 \leq t \leq \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})} (\hat{\xi}_n(t) - g_2(t)) < 0 \right].$$

Die Anwendung des folgenden auf SKOROKHOD zurückgehenden Lemmas

liefert dann die Existenz eines C_6 .

Lemma 3. g sei eine reellwertige stetige Funktion auf $[0, \infty)$, stetig differenzierbar in $(0, \infty)$, mit $g(0) \geq G > 0$ und $|\dot{g}(t)| \leq K$ ($t > 0$). Es existiert eine Konstante C_7 - abhängig allein von G, K und α_0 - , derart dass für $h > 0$

$$P\left[0 < \sup_{0 \leq t \leq t_0} (\zeta(t) - g(t)) < h\right] \leq C_7 h \quad (0 < t_0 \leq \alpha_0 + 1).$$

Beweis: Nach [10] , S.174 (Lemma 4) gilt für eine stetige Funktion f auf dem Einheitsintervall, die auf $(0, 1]$ stetig differenzierbar ist mit $|\dot{f}| \leq K$:

$$P\left[0 < \sup_{0 \leq u \leq 1} (\zeta(u) - f(u)) < h\right] \leq 2h \left\{ \frac{2e^{\frac{3}{2}K^2}}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4e^{-1/3}}{f(0)^2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/3} + K \right\}.$$

Unter Verwendung dieser Aussage erhalten wir in unserem Fall die Abschätzung

$$\begin{aligned} & P\left[0 < \sup_{0 \leq t \leq t_0} (\zeta(t) - g(t)) < h\right] \\ &= P\left[0 < \sup_{0 \leq u \leq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{t_0}} \zeta(ut_0) - \frac{1}{\sqrt{t_0}} g(ut_0) \right) < h t_0^{-1/2} \right] \\ &= P\left[0 < \sup_{0 \leq u \leq 1} \left(\zeta(u) - \frac{1}{\sqrt{t_0}} g(ut_0) \right) < h t_0^{-1/2} \right] \\ &\leq 2h t_0^{-1/2} \left\{ \frac{2e^{\frac{3}{2}t_0 K^2}}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4t_0 e^{-1/3}}{g(0)^2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/3} + t_0^{1/2} K \right\} \\ &\leq 2h \left\{ \frac{2e^{\frac{3}{2}(\alpha_0+1)K^2}}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4e^{-1/3}}{G^2\sqrt{2\pi}} \right)^{2/3} (\alpha_0+1)^{1/6} + K \right\} =: C_7 h. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Weiter behaupten wir die folgende Inklusion: (11)

$$[g_1(t) < \hat{\zeta}_n(t) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha]]$$

$$\subset \left[g_1(t) < \hat{\zeta}_n(t) < g_2(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right]$$

$C_8 \frac{\log n}{\sqrt{n}}$

für eine - nur von den zulässigen Grössen abhängige - Konstante C_8 .

Die zweite Menge ist in der ersten enthalten; die Pfade der ersten Menge, welche nicht in der zweiten liegen, treten erstmalig im Zeitintervall $[\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]$ aus dem durch g_1 und g_2 beschränkten Bereich hinaus. Diese Pfadmenge aber hat eine Wahrscheinlichkeit

$$\leq P[\sigma_{g_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]] + P[\sigma_{g_2}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]] ,$$

wobei $\sigma_{g_1}(\hat{\zeta}_n) = \inf \{t: \hat{\zeta}_n(t) = g_1(t)\}$ und $\sigma_{g_2}(\hat{\zeta}_n) = \inf \{t: \hat{\zeta}_n(t) = g_2(t)\}$ die Zeitpunkte des ersten Austritts aus dem Bereich $\{(t, z): g_1(t) < z\}$ bzw. $\{(t, z): g_2(t) > z\}$ angeben.

Es genügt, etwa vom ersten Summanden zu zeigen, dass er kleiner ist als $C_9 \log n / \sqrt{n}$ mit einer zulässigen Konstanten C_9 . Zu diesem Zweck ändern wir die Schranke g_1 ab zu $f_1(t) = g_1(\alpha) + K(t - \alpha)$ ($t \in [0, \infty)$). Aus der Inklusion

$$[\sigma_{g_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]] \subset [\sigma_{f_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]]$$

folgt dann

$$P[\sigma_{g_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]] \leq P[\sigma_{f_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})]] \leq \int_{\alpha}^{\alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})} \varphi_{f_1}(t) dt ,$$

wobei φ_{f_1} die Dichte der Verteilung von $\sigma_{f_1}(\hat{\zeta}_n)$ ist. Zur Berechnung dieser Dichte bilden wir

$$P[\sigma_{f_1}(\hat{\zeta}_n) > \delta] = P[\inf \{t: \hat{\zeta}_n(t) = f_1(t)\} > \delta]$$

$$\begin{aligned}
 &= P \left[\inf \{ t : \zeta_n(t) - Kt = g_1(\alpha) - K\alpha \} > \delta \right] \\
 &= P \left[\inf \{ t : \zeta(t) + Kt = K\alpha - g_1(\alpha) \} > \delta \right] \\
 &= P \left[\sup_{0 \leq t \leq \delta} (\zeta(t) + Kt) < K\alpha - g_1(\alpha) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_{-(K\alpha - g_1(\alpha))}^{K\alpha - g_1(\alpha)} e^{-(u - K\delta)^2/2\delta} du + \frac{1 - e^{2K(K\alpha - g_1(\alpha))}}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_{-\infty}^{-(K\alpha - g_1(\alpha))} e^{-(u - K\delta)^2/2\delta} du
 \end{aligned}$$

(vgl. [10], Lemma 2 (S. 171)). Differentiation nach δ ergibt

$$\varphi_{f_1}(\delta) = \frac{K\alpha - g_1(\alpha)}{\sqrt{2\pi\delta^3}} e^{-(K\alpha - g_1(\alpha) - K\delta)^2/2\delta};$$

diese Funktion ist unabhängig von g_1 und α durch

$$C_{10} := \frac{G_1 + 2K\alpha_0}{\sqrt{2\pi G_1^{6/27}}} e^{-\frac{3}{2} + K(G_1 + 2K\alpha_0)}$$

beschränkt, woraus folgt:

$$P \left[\varsigma_{g_1}(\hat{\zeta}_n) \in [\alpha, \alpha(1 + C_4 \frac{\log n}{\sqrt{n}})] \right] \leq C_9 \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

mit $C_9 = C_4 C_{10}$.

Aus (9), (10), (11) - zusammen mit der analogen Abschätzung nach oben - erhält man

$$Z_n^\alpha \subset \frac{C_2\alpha_0}{n} + (C_6 + 2C_9) \frac{\log n}{\sqrt{n}} \subset \overline{\Sigma}_n^\alpha \subset \frac{C_2\alpha_0}{n} + (C_6 + 2C_9) \frac{\log n}{\sqrt{n}} \subset Z_n^\alpha.$$

Daraus folgt

$$P(Z_n^\alpha \Delta \overline{\Sigma}_n^\alpha) \leq 2C_2\alpha_0/n + 2(C_6 + 2C_9) \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

und damit die Behauptung.

Als Corollare formulieren wir nun Anwendungen der beiden soeben bewiesenen Sätze auf das Problem der Konvergenzgeschwindigkeit von reellen Bildverteilungen, die schon in § 2 betrachtet worden sind. Allgemein gelten dabei für ξ die Voraussetzungen von § 4.

Corollar 8. (vgl. Corollar 4) Für $\theta > 0$ sei τ_n^θ der letzte Zeitpunkt, in welchem

$$\left| \frac{1}{k} \xi(k) \right| \geq \frac{\theta}{\sqrt{n}}$$

gilt. Es gibt eine Konstante M_1 , welche ausser von C und θ allein von α_1 abhängt, mit der Eigenschaft

$$\left| P[\tau_n^\theta < \alpha] - \theta \int_0^\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)^2 \theta^2 u}{2}} du \right| \leq M_1 \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad (\alpha \geq \alpha_1 > 0).$$

Ausserdem kann M_1 unabhängig von θ gewählt werden, sofern θ ein kompaktes, die Null nicht enthaltendes, Intervall durchläuft.

Zum Beweis spezialisieren man die Grössen aus Satz 4 wie folgt:

$g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ beziehungsweise für $t \in [0, 1/\alpha]$; $K = 0$; $0 < G_1 \leq G_2$ beliebig. Zur Berechnung der Grenzverteilung vergleiche man Corollar 4.

Corollar 9. (vgl. Corollar 7) Es gibt eine Konstante M_2 , welche ausser von C allein von den Grenzen $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ des Approximationsintervalles abhängt, in dem α variiert, derart dass

$$\left| P\left[\sqrt{n} \max_{k \geq n} \left| \frac{1}{k} \xi(k) \right| < \alpha \right] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i (2i+1) e^{-\frac{(2i+1)^2 u^2}{2}} du \right| \leq M_2 \frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

Corollar 10. (vgl. Corollar 6) Es gibt eine Konstante M_3 , welche
ausser von C allein von $\alpha_i^* > 0$ und $\beta_i^* > 0$ ($i=1,2$) abhängt, derart
dass

$$\left| P \left[\max_{k \geq n} \frac{1}{k} \xi(k) \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \mid \frac{1}{n} \xi(n) = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \right] - e^{-2\alpha(\alpha-\beta)} \right| \leq M_3 \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

für $0 < \alpha_1^* \leq \alpha \leq \alpha_2^* < \infty$ und $0 < \beta_1^* \leq \alpha - \beta \leq \beta_2^* < \infty$.

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} P \left[\max_{k \geq n} \frac{\xi(k)}{k} \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \mid \frac{\xi(n)}{n} = \frac{\beta}{\sqrt{n}} \right] &= P \left[\max_{k \geq 0} \frac{\xi(k) + \beta \sqrt{n}}{k+n} \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right] \\ &= 1 - P \left[\max_{k \geq 0} \frac{\xi(k) + \beta \sqrt{n}}{k+n} < \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right] \\ &= 1 - P \left[\frac{\xi(k)}{\sqrt{n}} < \alpha \left(\frac{k}{n} + 1 \right) - \beta \text{ für alle } k \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha(\alpha-\beta)} &= P \left[\max_{t \geq 0} \frac{\xi(t) + \beta}{t+1} \geq \alpha \right] \quad (\text{siehe Corollar 6}) \\ &= 1 - P \left[\xi(t) < \alpha(t+1) - \beta \text{ für alle } t \geq 0 \right] \end{aligned}$$

genügt es, Satz 3 auf die Funktion $t \rightarrow g_2(t) := \alpha(t+1) - \beta$
anzuwenden ($g_1 = -\infty$). Die kritischen Konstanten dieses Satzes
lassen sich hier folgendermassen bestimmen:

$$\begin{aligned} \sup_{t > 0} |\dot{g}_2(t)| &= \alpha \leq \alpha_2^* =: K_1, \\ \sup_{t \geq 1} |g_2(t) - t \dot{g}_2(t)| &= \alpha - \beta \leq \beta_2^* =: K_2, \\ G_1 := \beta_1^* &\leq g_2(0) = \alpha - \beta \leq \beta_2^* =: G_2, \\ G_3 := \alpha_1^* &\leq \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g_2(t)}{t} \leq \alpha_2^* =: G_4. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] CHUNG, K.L. On the maximum partial sums of sequences of independent random variables, Trans. Am. Math. Soc. 64, 205 - 233 (1948)
- [2] DONSKER, M.D. An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1951)
- [3] FREEDMAN, D.A. Some invariance principles for functionals of a Markov chain, Ann. Math. Statist. 38, 1 - 7 (1967)
- [4] ITÔ, K. - MC KEAN, H. Diffusion processes and their sample paths, Berlin - Heidelberg - New York (1965)
- [5] KRICKEBERG, K. Wahrscheinlichkeitsoperatoren von Verteilungen in Vektorräumen, Transactions of the third Prague Conference on Information Theory, Stat. Decision Functions, Random Processes, 1962, 441-452 (1964)
- [6] MÜLLER, D.W. Non - standard proofs of invariance principles in probability theory (im Erscheinen begriffen)
- [7] PROKHOROV, Yu. V. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theor. Probability Appl. 1, 157 - 214 (1956)
- [8] SKOROKHOD, A. V. A limit theorem for sums of independent random variables, Soviet Math. Dokl. 1, 810 - 811 (1960)
- [9] -----, A limit theorem for homogeneous Markov chains, Theor. Probability Appl. 8, 61 - 70 (1963)
- [10] -----, Studies in the theory of random processes, Reading (1965)
- [11] STRASSEN, V. Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales, Fifth Berkeley Symposium

Lebenslauf

Am 4. März 1942 wurde ich, Dietrich Werner Müller, als zweiter Sohn des Obergeringieurs Ernst Müller und seiner Ehefrau Hertha, geb. Roitzsch, in Dresden geboren. Nach dem Besuch der Volksschulen in Dresden-Reick, Cossebaude a.d. Elbe und - nach Übersiedelung in die Bundesrepublik im Herbst 1951 - Witten/Ruhr war ich Schüler des dortigen Städtischen Gymnasiums (1952 bis 1955) und dann bis zur Reifeprüfung im Jahre 1961 des humanistischen Staatlichen Görres-Gymnasiums in Düsseldorf, an dessen neusprachlichem Zweig ich auch zwei Jahre lang Griechisch lernte. Vom Sommersemester 1961 bis zum Sommersemester 1964 studierte ich Philosophie und Mathematik an der Universität Tübingen; was ich dort in den Vorlesungen der Herren Professoren Walter Schulz, Helmut Wielandt und Helmut H. Schaefer lernte, wurde für die Richtung meines wissenschaftlichen Interesses ausschlaggebend. Nach je einem Semester an den Universitäten Heidelberg (Wintersemester 1964/65; Philosophie und Mathematik) und Göttingen (Sommersemester 1965; Mathematik) folgte ich Herrn Prof. K. Jacobs an die Universität Erlangen; seiner grosszügigen Förderung ist es vor allem zu verdanken, dass ich schon nach zwei Semestern im Herbst 1966 mein Mathematikstudium mit der Diplom-Hauptprüfung abschliessen konnte. Seitdem erhalte ich ein Stipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die mir auch eine Kongressreise nach Pasadena/Calif. (USA) im Mai 1967 durch Übernahme eines Teils der Kosten ermöglichte.

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hogl

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz.) Tel. 22990

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
